Cours de mathématiques financières

Pour étudier les mathématiques financières, il faut posséder quelques outils de base, et le principal outil que nous verrons cette année est représenté par les suites numériques.

Une suite numérique est une application de l'ensemble des entiers naturels N (ou d'un sous-ensemble E de N) dans l'ensemble des réels R.
Cela veut dire qu'à tout élément i de N (ou de E) on associe une image u_k, qui est un nombre réel. L'ensemble des termes u_k constitue la suite numérique ; elle est notée (Un) avec $n \in N$ ou E ($E \subset N$).

Les suites, en pratique, peuvent être données par une formule,

$U_n = f(n)$ avec $n \in N$ ou E ($E \subset N$), exemple $U_n = 4n^2 - 6n + 10$

Ne pas confondre (Un), qui est la suite numérique, et Un, qui est un élément indicé n de la suite. (Un) s'écrit plus précisément $(U_n)_{n \in N}$.

Autre type de suite, la suite récurrente, dans laquelle chaque terme est défini à partir du précédent, sauf, bien sûr, le premier terme, qui est donné. Exemple,

$$U_o = 4$$
$$\forall\ n \in N^*,\ U_n = (3 - U_{n-1})^{1/3}$$

Nous nous limiterons à l'étude de deux types particuliers de suites numériques récurrentes, la suite arithmétique, et surtout la suite géométrique, qui est centrale dans l'apprentissage des mathématiques financières.

Nous commencerons par l'étude des suites arithmétiques.

Partie I
Suites arithmétiques et intérêts simples

1 Définition.

Une suite $(a_n)_{n \in N}$ de nombres réels est dite "arithmétique" si, en dehors du **premier terme de la suite**, chaque autre terme se déduit du précédent par addition d'un réel constant. Le réel constant est appelé **raison** de la suite,

Soit a_k un terme quelconque de la suite, et r la raison de la suite

$$a_k = a_{k-1} + r$$

On montre que chaque terme d'une suite arithmétique est aussi la moyenne arithmétique du terme précédent et du terme suivant.

$$a_k = \frac{1}{2}(a_{k-1} + a_{k+1}) \quad \text{pour } k \neq 0$$

La suite est infinie, si la suite est indexée sur l'ensemble N des entiers, et finie, si elle n'est indexée que sur un sous-ensemble de N. Fort de cette assertion, on fait souvent commencer la suite à l'indice 1, en excluant zéro, l'ensemble des entiers naturels étant alors noté N*.

2 Sens de variation d'une suite arithmétique.

r étant la raison de la suite,
* si $r < 0$ alors la suite est décroissante
* si $r = 0$ alors la suite est constante
* si $r > 0$ alors la suite est croissante

3 Propriétés.

a) lien entre les termes et le premier terme
* si a_1 est le premier terme, alors pour tout n entier naturel non nul :

$a_n = a_1 + (n \quad 1)r$

* si a_0 est le premier terme, alors pour tout n entier naturel : $a_n = a_0 + nr$

b) somme S des termes d'une progression arithmétique:

$$S = (\text{nbre de termes})\ X\ (1^{er}) + \underline{(\text{nbre de termes} \quad 1) \times (\text{nbre de termes})} \quad x \ \text{raison}$$

$$S = n \ x \ a1 + \frac{(n \quad 1) x\, n}{2} \quad x \ r$$

ou encore $S = (\text{nbre de termes}) \times \dfrac{(\text{premier terme} + \text{dernier terme})}{2}$

$$S = n \ x \ \frac{a_1 + a_n}{2}$$

Envisageons le cas où la suite part de a_0, toujours avec n termes,

: $S = a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1}$

$$S = n \ x\, a_0 + \frac{(n \quad 1) x\, n}{2} \quad x\, r \quad = \quad n \ x \ \frac{a_0 + a_{n-1}}{2}$$

c) somme des entiers naturels successifs de 0 à n .

On applique la formule ,

$$S = n \ x\, a_0 + \frac{(n \quad 1) x\, n}{2} \quad x\, r$$

dans laquelle $a_0 = 0$, et le nombre de termes est $n + 1$, d'où,

$$\sum k = 0 + 1 + 2 + 3 + \ldots + (n - 1) + n = \frac{n \ X \ (n + 1)}{2}$$

soit

$$\sum k = \frac{(\text{plus grand entier})\ X\ (\text{entier suivant})}{2}$$

Partie II

Application économique des suites arithmétiques: les intérêts simples.

On traite ici des placements d'argent faits par un investisseur. L'argent est placé dans une banque, sur un marché financier, ou même prêté à une tierce personne. Il rapporte un intérêt, qui est le revenu du placement.

Soit S_0 une somme, dite capital initial, placée à une date initiale, i le taux d'intérêt portant sur une période donnée, en général l'année, et n le nombre de périodes – par exemple le nombre d'années – pour le placement envisagé. Les intérêts sur placement sont touchés en principe en fin d'année, s'il s'agit d'un intérêt annuel.

Nous poserons qu'à chaque période, les intérêts rapportés sont identiques à ceux perçus à la fin de la première période:

$I_1 = S_0 \times i$ *exprimé par exemple en euros*

Cette somme est perçue par l'investisseur, et n'est pas ajoutée au capital.
elle ne rapporte donc pas d'intérêt.
Le montant total I des intérêts après n périodes est alors égal à n fois ceux de la première période:

$I = n \times I_1 = n \times S_0 \times i$

Partie III

Suites géométriques et intérêts composés.

6 Définition.

Une suite de nombres **réels** $(a_n)_{n \in N}$ est dite géométrique si chaque terme, **sauf le premier,** se déduit du précédent en multipliant ce dernier par une **constante** appelée la **raison** de la suite géométrique.

Soit a_1 le terme initial, et a_k un terme quelconque de la suite, avec $a_k \neq a_1$, et q la raison de la suite, **qui est un réel**,

$$a_k = a_{k-1} \times q$$

7 *Sens de variation* d'une suite géométrique.

Différents cas sont à envisager :

* 1er cas:
premier terme = 0 ou q = o ou q = 1, alors la suite $(a_n)_{n \in N}$ est stationnaire. Par exemple, si q = 1, tous les termes de la suite sont égaux.

* 2ème cas:
premier terme $\neq 0$ et $q > o$ et $q \neq 1$ alors la suite $(a_n)_{n\in N}$ est strictement **croissante ou décroissante** (c'est le cas, si $0 < q < 1$).

* 3ème cas:
premier terme $\neq 0$ et $q < o$, alors la suite $(a_n)_{n \in N}$ est alternée.

8 Propriétés.

8.1 Lien entre les termes et le premier.

* si a_1 est le premier terme, alors pour tout n entier naturel non nul : $a_n = a_1 \times q^{n-1}$

* si a_0 est le premier terme, alors pour tout n entier naturel : $a_n = a_0 \times q^n$

8.2 Somme S_n des n premiers termes.

1er cas: si le premier terme est a1 alors on a :

$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$

$S_n = a_1 + q \times a_1 + q^2 \times a_1 + ... + q^{n-1} \times a_1$

$S_n = a_1 \times [1 + q + q^2 + ... + q^{n-1}]$

$S_n = a_1 \times \frac{1 - q^n}{1 - q}$ si q est différent de 1

Démonstration :

Reprenons $S_n = a_1 + q \times a_1 + q^2 \times a_1 + ... + q^{n-1} \times a_1$
Il suffit de multiplier cette équation pas q, et de comparer les deux lignes,

$qS_n = qa_1 + q^2 \times a_1 + q^3 \times a_1 + ... + q^n \times a_1$

et par différence des deux lignes, on obtient,

$(1 - q) S_n = a_1 - q^n \times a_1 = a_1(1 - q^n)$, d'où

$$S_n = a_1 \times \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

Remarque : on a $S_n = n \times a1$ si q = 1.

2ème cas: si le premier terme est a_0 alors on a pour n termes :

$S_n = a_0 + a_1 + ... + a_{n-1}$

$S_n = a_0 + q \times a_0 + q^2 \times a_0 + ... + q^{n-1} \times a_0$

$S_n = a_0 \times [1 + q + q^2 + ... + q^{n-1}]$

$S_n = a_0 \times \dfrac{1 \quad q^n}{1 - q}$ avec q différent de 1

et $S_n = n \times a_0$ si $q = 1$.

9 Exemples

9.1 Soit le 1er terme $a_1 = 3$ et la raison $q = \quad 1/5$

a) Trouver les 5 premiers termes de la progression géométrique et leur somme S_5

b) Retrouver la valeur de S_5 directement, sans passer par l'addition des 5 premiers termes.

Réponses:

Il s'agit d'une suite alternée, puisque la raison q est négative,

a) $a_2 = a1 \times q = 3 \times -1/5 = \quad 3/5$;

$a_3 = a_2 \times q = \quad 3/5 \times -1/5 = +3/25$; $a_4 = \quad 3/125$; $a_5 = \quad 3/625$

et en additionnant les cinq termes, $S_5 = 1563/625 = 2{,}5008$

b)

$$S_5 = a_1 \times \frac{1 \quad q^n}{1 - q} = 3 \times \frac{1 \quad (-1/5)^5}{1 - (-1/5)} = \frac{1 - (-0{,}00032)}{1 - (-0{,}2)} = 2{,}5008$$

10 Limite de S_n si n tend vers l'infini

Soit "a" le premier terme et "q" la raison. Si la raison a une valeur absolue inférieure à 1, soit ($|q| < 1$), alors S_n tend vers $\dfrac{1^{er} \text{ terme}}{1 - \text{raison}}$ lorsque n tend vers l'infini.

Pour le vérifier, il suffit de reprendre la formule de calcul de la somme d'une suite géométrique,

$$S_n = a_1 \times \frac{1 \quad q^n}{1 - q}$$

et, $\lim\limits_{n \to \infty} q^n = 0$ si $|q| < 1$, soit $0 <$ u $-1 < q < 0$

d'où $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = a_1 \times \dfrac{1 \quad q^n}{1 - q} = \dfrac{a_1}{1 - q}$

Partie IV

Application financière des suites géométriques: la capitalisation des intérêts.

12 Intérêts composés

12.1 Principe de la capitalisation des intérêts.

Une somme d'argent est placée par un épargnant auprès d'une banque ; le contrat passé avec la banque prévoit le versement d'un intérêt au bout d'une période, par exemple un an. Soit **i le taux d'intérêt** pour une période, exprimé en pourcentage, et **C la somme placée**, appelée aussi le **capital placé** ; en fin de période, le client de la banque a droit à un intérêt égal à,

$$I = C \times i$$

Exemple, un placement de 5 000 € au taux annuel de 4,2%, rapporte au bout d'un an,

$$I = 5\,000 \times 4{,}2\% = 5\,000 \times 0{,}042 = 210 \text{ €}$$

Concernant les intérêts composés, on calcule de la même façon, simplement, le contrat passé avec la banque prévoit que le déposant laissera son capital placé plusieurs périodes, et que l'intérêt gagné à la fin de chaque période convenue, se rajoutera **au capital.**
Par conséquent, le capital placé va grossir de période en période du montant des intérêts gagnés et non versés par la banque.

Le principe des intérêts composés, c'est donc une accumulation progressive des intérêts gagnés, qui se rajoutent à chaque fin de période au capital placé ; on parle de capitalisation des intérêts.

Appelons t la période courante, et t-1 la période précédente ; le capital en fin de période t-1, après ajout des intérêts gagnés en t-1 est C_{t-1}.

12.2 Valeur acquise par un placement unique sur une seule période.

C = montant du capital placé au début de la période évalué en euros

1= durée du placement

i = taux d'intérêt pour 1 euro et pour la période

C_1 = valeur acquise par le capital C après une seule capitalisation au taux i (i est, par exemple, le taux annuel, si la période correspond à une année)

Alors la **valeur acquise** par le capital C sera :

$$C_1 = C + C \times i = C \times (1 + i)$$

12.3 Formule fondamentale des intérêts composés:

C= montant du capital placé au début
n = durée du placement donnée en nombre de périodes, par exemple en nombre d'années
i = taux d'intérêt pour un euro et pour une période
C_n = valeur acquise par le capital C après n capitalisations successives d'intérêts au taux i
I = intérêt total
La formule fondamentale des intérêts composés donne la **valeur acquise** C_n par le capital C après n capitalisations successives d'intérêts au taux i par période:

$$C_n = C \times (1 + i)^n$$

Démonstration

On peut raisonner période par période pour comprendre cette formule ; en notant C le capital initialement investi, C_1 le capital après la première capitalisation, C_2 le capital après la seconde capitalisation, ... , Cn le capital après la n-ième capitalisation ; il vient,

$$
\begin{aligned}
C_1 &= C \times (1 + i) \\
C_2 &= C_1 \times (1 + i) = C \times (1 + i)^2 \\
C_3 &= C_2 \times (1 + i) = C \times (1 + i)^3 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
C_n &= C_{n-1} \times (1 + i) = C \times (1 + i)^n
\end{aligned}
$$

Chaque montant C_k se déduit du précédent C_{k-1} par une multiplication par (1 + i). On peut par conséquent considérer que les valeurs C, C_1, C_2, ...C_n, sont les termes successifs d'une suite géométrique de n + 1 termes, avec comme premier terme C, et comme raison (1 + i) ; on sait que si a_0 est le premier terme d'une suite géométrique de n + 1 termes, alors pour tout n entier naturel, on vérifie la relation

$$a_n = a_0 \times q^n ,$$

soit ici **en assimilant C à a_0**, et q à (1 + i)

$$C_n = C \times (1 + i)^n$$

C_n est la valeur acquise au bout de n périodes. On en déduit l'intérêt total par différence entre la valeur acquise C_n et le capital initial C:

$$I = C_n \quad C = C \times (1 + i)^n \quad C = C \times [(1 + i)^n \quad 1]$$

Noter que l'expression " (1 + i) " est appelée coefficient multiplicateur associé au taux d'intérêt i.

12.4 Exercices: calculs de valeurs acquises

a) Un capital de 50000 euros est placé à intérêts composés, au taux annuel de 9%, avec capitalisation annuelle des intérêts. Calculer la valeur acquise au bout de 7 ans.

Réponse:
C = 50000 euros ; i = 9% = 0,09 ; n = 7

d'où 1 + i = 1,09

$$
\begin{aligned}
C_n &= C \times (1 + i)^n \\
&= 50000 \times (1,09)^7 = 91401,95 \text{ €}
\end{aligned}
$$

b) Un capital de 20000 euros est placé à intérêts composés au taux trimestriel de 2,5% avec capitalisation trimestrielle des intérêts.

Calculer la valeur acquise au bout de 6 ans.

Réponse:
La capitalisation ET le taux se réfèrent **au trimestre**. Il faut donc compter la durée du placement en nombre de trimestres ; on dénombre, par conséquent, 6 x 4 = 24 capitalisations successives d'intérêts.

d'où:

$$C_{24} = C \times (1 + i)^n = 20000 \times (1 + 0{,}025)^{24} = 36174{,}52\ €$$

13 Taux équivalents

13.1 Définition

Par principe, on dit que deux taux d'intérêt i et j, de périodes différentes, sont équivalents si:
* appliqués à un même capital C,
* après écoulement d'une même durée d,

ils conduisent à une même valeur acquise V_d.

13.2 Exemple 1

Soit un capital placé au taux annuel $i_a = 7\%$.

On désire calculer le taux semestriel équivalent i_s.

Réponse: l'année représente 2 semestres.

Appelons A le capital placé ; que l'on applique le taux semestriel ou le taux annuel, le capital A doit donner au bout d'un an la même valeur acquise, soit,

$A (1 + i_a) = A (1 + i_s)^2$

d'où $1 + i_a = (1 + i_s)^2$

soit $1{,}07 = (1 + i_s)^2$

$\Leftrightarrow \sqrt{1{,}07} = 1 + i_s$

$\Leftrightarrow \sqrt{1{,}07} \quad 1 = i_s$

d'où: $i_s = 0{,}034408$, ou encore 3,4408% , différent et inférieur à la moitié de 7% , qui serait 3,5%

Illustrons avec un exemple chiffré : supposons que A soit égal à 20000 € ; si l'on considère que la capitalisation des intérêts se fait en une seule fois à la fin de l'année en prenant le taux annuel, ici 7%, ou que la capitalisation se fait en deux fois, à la fin du premier semestre et à la fin du deuxième semestre, en prenant le taux semestriel équivalent, le résultat sera le même.

<u>en une fois</u>, le capital acquis en fin d'année sera,

$$C_a = 20000 \text{ x } (1 + 7\%) = 21400\ €$$

<u>en deux fois</u>, à la fin du premier semestre, l'intérêt sera,

$$I_{s1} = 20000 \text{ x } 3{,}4408\% \qquad 688{,}16\ €$$

La valeur acquise du capital sera

$$C_{s1} = 20000 + 688{,}16 = 20688.16\ €$$

A la fin du deuxième semestre, qui se confond avec la fin de l'année, la valeur acquise du capital sera après capitalisation de l'intérêt du deuxième semestre,

soit $20688{,}16 \text{ x } 3{,}4408\% \qquad 711{,}84$ €,

$$C_{s2} = 20688{,}16 + 711{,}84 = 21400\ €$$

13.3 Exemple 2

Soit un capital placé au taux annuel i_a = 7%. On désire calculer le taux mensuel équivalent i_m.

Réponse: l'année représente soit 12 mois ; le taux mensuel équivalent au taux annuel se calcule à partir de la racine douzième du coefficient multiplicateur annuel $(1 + i_a)$

Ecrivons l'égalité des coefficients multiplicateurs:

$1 + i_a = (1 + i_m)^{12}$

soit $1,07 = (1 + i_m)^{12}$

$\Leftrightarrow (1,07)^{1/12} = 1 + i_m$

$\Leftrightarrow (1,07)^{1/12} \quad 1 = i_m$

d'où: $i_m \quad 0,005654$ ou encore 0,5654%

13.4 Exemple 3

Soit un capital placé au taux mensuel i_m = 1,57%. On désire calculer le taux semestriel i_s équivalent.

Réponse: le semestre représente 6 mois ; donc, si l'on prend comme base de calcul le mois, le semestre représente six capitalisations successives.

Ecrivons l'égalité des coefficients multiplicateurs :

$1 + i_s = (1 + i_m)^6$

soit $1 + i_s = (1,0157)^6$

$\Leftrightarrow i_s = (1,0157)^6 \quad 1$

d'où: $i_s \quad 0,097976$ ou encore 9,798%

13.5 Exemple 4

Soit un capital placé au taux semestriel i_s = 2,5%. On désire calculer le taux annuel i_a équivalent.

Réponse: la durée de l'année correspond à 2 semestres.

Ecrivons l'égalité des coefficients multiplicateurs:

$1 + i_a = (1 + i_s)^2$

Soit $1 + i_a = (1.025)^2$

$\Leftrightarrow i_a = (1.025)^2 - 1$

d'où: $i_a \quad 0,050625$ ou encore 5,0625%

Partie V

Actualisation - Valeur actuelle – capitaux Equivalents

14 Le principe fondamental des mathématiques financières

Par principe, la comparaison financière des valeurs de deux sommes en euros n'a de sens que si on les rapporte à une même date.

Si les valeurs connues correspondent à des dates différentes alors leur comparaison directe, c'est-à-dire sans procéder à un ajustement, n'a pas de sens. Il faut, dans ce cas, recalculer leurs valeurs **par rapport à une date commune choisie** dans le temps, le choix de la date tenant compte du contexte.

15 Le principe de l'actualisation.

Raisonnons en nous mettant "provisoirement" à la place d'un banquier... Il prête à l'un de ses clients une somme V_0 à la date initiale. Banquier et client se mettent d'accord pour que le remboursement se fasse au bout de n périodes, pour une somme globale égale à V_n.
On peut considérer, pour faire image, que c'est le banquier qui fait un placement auprès du client ; i est le taux par période, et on suppose que les intérêts périodiques ne sont pas versés au banquier, mais capitalisés.

Le banquier récupère alors à la date n le montant V_n égal à la somme prêtée V_0 augmentée du montant des intérêts composés produits au cours des n périodes, celles-ci représentant la durée entre la négociation initiale au temps 0 et la date n d'échéance pour le remboursement de la somme V_n.

La somme V_0 produisant des intérêts composés, nous avons la relation:

$$V_n = V_0(1 + i)^n$$

on peut dire que V_0, la somme "investie" initialement sur le client, est la **valeur actuelle** au temps 0 du capital V_n remboursé à l'échéance n fixée.

Réciproquement, V_n, étant la valeur à recevoir dans n années, sera dite la **valeur acquise de la valeur V_0** placée pendant n périodes au taux i.

L'idée de l'**actualisation**, c'est de considérer comme équivalentes la valeur initiale au temps 0 de V_0 et la valeur obtenue au temps n V_n.
En d'autres termes, c'est considérer que posséder V_0 aujourd'hui ou posséder V_n dans n années, c'est la même chose, si le taux d'intérêt est i.

Si aujourd'hui j'ai 100 €, et si le taux d'intérêt est de 4%, je peux choisir de les dépenser tout de suite, ou attendre, par exemple, 5 ans, en les plaçant, et obtenir ainsi, en compensation de mon renoncement à utiliser ces 100 € tout de suite, $100 \times (1 + 4\%)^5$, soit 121,67 €.
Ceci veut dire que pour moi les 100 € consommables aujourd'hui ont même valeur que 121,67 € que je pourrais obtenir dans 5 ans.

16 Formule fondamentale de l'actualisation

16.1 Posons :

V_n = valeur finale et future à la date n du capital C **placé à intérêts composés**.
n = durée du placement = nombre de périodes
i = taux d'intérêt pour 1 euro et pour une période
V_0 = valeur actuelle à la date 0 du capital C

On sait que

$$V_n = V_0 \times (1 + i)^n$$

d'où l'on tire la formule fondamentale de l'actualisation permettant de calculer la valeur actuelle de V_n:

$$\frac{V_n}{(1+i)^n}$$

$$V_0 = \frac{\quad}{\quad} = V_n(1 + i)^{\;n}$$

V_0 est la valeur de Vn ramenée à la date 0, c'est-à-dire sa valeur actuelle. La notion de valeur actuelle rappelle l'adage, "un tiens vaut mieux que deux tu l'auras". En fait, cet adage introduit une deuxième dimension, celle du risque, le risque de ne pas pouvoir se faire rembourser dans des conditions satisfaisantes à l'échéance.
On retrouve ainsi les deux justifications que l'on donne traditionnellement au taux d'intérêt, d'une part le fait de "récompenser" le renoncement à une "consommation" immédiate de l'argent dont on dispose, d'autre part, la prise en compte du risque que comporte tout placement d'argent.

Le taux d'intérêt i utilisé pour passer de la valeur acquise à la valeur actuelle est appelé **taux d'actualisation**.

16.2 Exemple

Après négociation, le client d'une banque règlera une dette de 100 000 euros, à échéance de 5 ans à partir du jour de la négociation, au taux annuel d'intérêt composé de 7%.
Si le client décidait de régler la dette le jour même de la négociation, quel serait le montant du remboursement?

Réponse:
Il faut **actualiser** à la date 0 la somme de 100 000 euros qui devrait être versée 5 années plus tard, c'est-à-dire calculer $V_{0,}$ qui est la valeur actuelle de $V_5 = 100000$ €

soit: $V_0 = V_5(1 + i_a)^{\;5}$
$\Leftrightarrow V_0 = 100000 \times (1,07)^{\;5}$ $\qquad (1,07)^{\;5} = 0{,}7129862$
d'où: $V_0 = 71\,298{,}62$ €

Le client ne versera que 71 298,62 € à la banque, qui le remercie d'une certaine façon de rembourser sa dette longtemps avant l'échéance.

16.3 Remarque

La différence entre le capital V_n (appelé "nominal de la créance") et la valeur actuelle V_0 est le nombre "e" appelé "escompte à intérêt composé"
d'où: $e = 100000 - 71298{,}62 = 28701{,}38$ €

16.4 Remarques

La valeur "actuelle" est obligatoirement une somme "plus petite" que la valeur finale.
La valeur "acquise" est obligatoirement une somme "plus grande" que la valeur initiale.

16.5 Exemple : financement d'un investissement

Une entreprise veut acheter du matériel. Elle peut choisir entre deux options de financement différentes pour acquérir ce matériel, au même taux d'intérêt composé annuel $i_a = 8\%$:

Option 1 : remboursement de 69000 euros dans 4 ans.

Option 2 : remboursement de 85000 euros dans 7 ans.

Quelle option représente la dette la plus faible ?

Réponse:
D'après le Principe Fondamental des Mathématiques Financières, la comparaison des valeurs de deux capitaux n'a de sens que pour une même date.

Quelle est la date à laquelle l'entreprise doit faire son choix ?
C'est le jour de la négociation soit la date "0". Il faut donc comparer les options en calculant les deux valeurs actuelles, avec 8% comme taux d'actualisation :

Option 1 :
remboursement de 69000 euros dans 4 ans $\Leftrightarrow$ $V_{0(1)} = V_{4(1)} \text{x} (1+i)^{4} = 69000 \times 1,08^{4}$
$\Leftrightarrow$ $V_{0(1)} = 50717,06$ € $[1,08^{4} = 0,73503]$

Option 2 :
remboursement de 85000 euros dans 7 ans$\Leftrightarrow$ $V_{0(2)} = V_{7(2)}(1+i)^{7} = 85000 \times 1,08^{7}$
$\Leftrightarrow$ $V_{0(2)} = 49596,68$ € $[1,08^{7} = 0,58349]$

La deuxième option représente la dette la plus faible pour l'entreprise au jour de la négociation. A cette date, elle "économise" la somme de

$$1120,38 \text{ €} = 50717,06 - 49596,68$$

en choisissant l'option 2.

17 Capitaux équivalents.

17.1 Définition

Par principe, on dit que deux capitaux C1 et C2 sont équivalents s'ils ont,
* des valeurs actuelles égales (à une même date)
* des valeurs nominales différentes
* des échéances différentes dans le temps

MAIS
un même taux d'intérêt composé pour l'actualisation.

17.2 Exemple

Un capital de nominal $V_1 = 68024.45$ €, à échéance de 4 ans, négocié au taux annuel de 8%, est équivalent au capital de nominal $V_2 = 85691.22$ €, à échéance de 7 ans, négocié au même taux annuel de 8%,
En effet, choisissons la date "0" pour la comparaison des valeurs actuelles. Les deux valeurs actuelles sont bien égales:
$V_{01} = V_1(1+i)^{n1} = 68024,45 \times 1,08^{4} = 50000$ € $[1,08^{4} = 0,73503]$
$V_{02} = V_2(1+i)^{n2} = 85691,22 \times 1,08^{7} = 50000$ € $[1,08^{7} = 0,58349]$

17.3 Exemple : calcul d'une valeur nominale

On désire substituer à un règlement de montant $V_1 = 100000$ €, qui était prévu dans 4 ans, un autre règlement de montant V_2, à échéance dans 6 ans.
Calculer V_2 compte tenu d'un taux annuel d'actualisation de 8%.

Réponse:
La substitution n'est légitime que si, les capitaux sont équivalents à la même date (prenons "0" car c'est l'instant du choix).
Or la valeur actuelle de 100000 € dans 4 ans est,
$V_{0(1)} = V_1 \times 1,08^{4} = 100000 \times 1,08^{4} = 73502,99$ €

V_2 doit être telle que sa valeur actuelle soit aussi de 73502,99 €,

$V_{0(2)} = V_2 \times 1{,}08^{\ 6} = 73502{,}99$ soit $V_2 = 73502{,}99 * 1{,}08^6 = 116640$ €

On peut recouper ce résultat à partir de l'égalité $V_{0(1)} = V_{0(2)}$ qui doit être vérifiée ; celle-ci peut s'exprimer de la façon suivante,

$100000 \times 1{,}08^{\ 4} = V_2 \times 1{,}08^{\ 6}$

$\Leftrightarrow V_2 = \dfrac{100000 \times 1{,}08^{\ 4}}{1{,}08^{\ 6}}$

$\Leftrightarrow V_2 = 100000 \times 1{,}08^{\ 4+6}$

$\Leftrightarrow V_2 = 100000 \times 1{,}08^2$ $\qquad 1{,}08^2 = 1{,}1664$

$\Leftrightarrow V_2 = 116640$ €

Partie VI
Annuités - Suite d'annuités constantes

18 Définitions et vocabulaire

On appelle "annuités" une suite de versements effectués à intervalles de temps constants (l'intervalle est appelé "période"). On va admettre que tous les versements sont égaux, d'où l'appellation d'annuités constantes.

Les versements correspondent à des placements successifs, à intérêts composés, de sorte que l'investisseur accumule un capital qui grossit à la fois, par les versements successifs, et par les intérêts capitalisés.

Il faut chaque fois préciser:
la date du 1er versement
la période entre 2 versements successifs
le nombre n de versements
le montant de chaque versement appelé "annuité"

19 Valeur acquise d'une suite d'annuités constantes.

Supposons que les versements sont effectués en fin de période.

Considérons **n versements** égaux à A euros, effectués chacun en fin de période, portant des intérêts composés au taux i par période.

Le premier versement A est effectué à la date 1 et le dernier à la date n.

On peut construire le tableau suivant:

Rang de l'annuité	*Date du versemt*	*Durée de capi*^{ion}	*Valeurs acquises par les an*^{tés}
1	1	*n* -1 *périodes*	$A(1 + i)^{n\;\;1}$
2	2	*n* -2 *périodes*	$A(1 + i)^{n\;\;2}$
3	3	*n* -3 *périodes*	$A(1 + i)^{n\;\;3}$
*	*	*	*
*	*	*	*
*	*	*	*
n - 1	*n* - 1	1 *période*	$A(1 + i)^{1}$
n	*n*	0 *période*	$A(1 + i)^{0}$
			TOTAL = V_n = *valeur acquise*

On obtient la valeur acquise totale V_n par la somme de toutes les valeurs acquises par les annuités successives:

$$V_n = A(1 + i)^{n\;\;1} + A(1 + i)^{n\;\;2} + A(1 + i)^{n\;\;3} + ... + A(1 + i)^{1} + A(1 + i)^{0}$$

$$\Leftrightarrow V_n = A(1 + i)^{n\;\;1} + A(1 + i)^{n\;\;2} + A(1 + i)^{n\;\;3} + ... + A(1 + i)^{1} + A$$

La commutativité de l'addition fait que l'on peut inverser l'ordre des termes des (n - 1) additions,

$$V_n = A + A(1 + i)^{1} + A(1 + i)^{2} + A(1 + i)^{3} + ... + A(1 + i)^{n\;\;3} + A(1 + i)^{n\;\;2} + A(1 + i)^{n\;\;1}$$

La dernière expression correspond à la somme des n termes d'une suite géométrique de raison égale à (1 + i), et de premier terme égal à A, de sorte que,

$$V_n = A \times \frac{(1 + i)^{n}\;\;\;1}{(1 + i)\;\;\;1} \qquad \text{Rappel} \quad S_n = a_1 \times \frac{1\;\;\;q^{n}}{1 - q} \quad \text{avec q différent de 1}$$

$$\Leftrightarrow V_n = A \times \frac{(1 + i)^{n}\;\;\;1}{i} \qquad \text{ou encore } S_n = a_1 \times \frac{q^{n}\;\;\;1}{q - 1}$$

La valeur acquise V_n d'une suite de n versements constants, fin de période , de valeur A au taux i avec intérêts composés se calcule, par conséquent, par la formule fondamentale:

$$V_n = A \times \frac{(1 + i)^{n}\;\;\;1}{i}$$

19.1 Remarque

La dernière annuité est versée comme les précédentes en fin de période. Cependant les calculs de la valeur acquise sont effectués à la même date que le versement de cette dernière annuité. Celle-ci ne porte donc pas d'intérêts.

19.2 Exemple: calcul de valeur acquise

Soit une suite de 16 annuités constantes, de 10000 € chacune, versées en fin de période, pour un taux de capitalisation égal à 8,5%. Calculons la valeur acquise par cette suite d'annuités à la date du dernier versement.

Réponse:

$$V_{16} = 10000 \times \frac{1{,}085^{16} - 1}{0{,}085} = 316320{,}12 \text{ €}$$

Remarquons que V_{16} est la valeur acquise c'est à dire le "capital constitué", qui comprend le "capital versé" sous forme de 16 versements successifs, et les intérêts composés.

Le capital versé est égal à 16 × 10000 = 160000 €.

Les "intérêts composés" produits par la capitalisation sont égaux à la différence entre le capital constitué et le capital versé soit 156320,12 € = 316320,12   160000.

20 Valeur actuelle d'une suite d'annuités constantes.

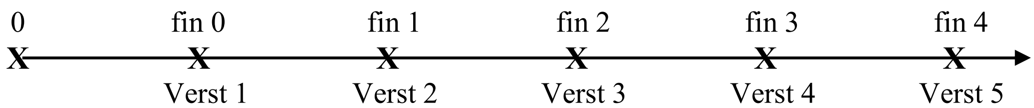
On effectue une suite de n versements constants, tous en fin de période, à partir de la date 0. La **valeur actuelle** de la suite d'annuités est le total V_0 (exprimé une période avant le versement de la première annuité) des valeurs actuelles respectives de chaque annuité, exprimées à la date 0 , pour un taux d'actualisation "i".

Le premier versement A est effectué fin de la période 0 et le dernier à la fin de la période n-1.

On peut construire le tableau suivant:

Rang de l'annuité	*Date du versemt*	*Valeurs actuelles des an^{tés}*
1	*fin 0*	$A(1+i)^{1}$
2	*fin 1*	$A(1+i)^{2}$
3	*fin 2*	$A(1+i)^{3}$
*	*	*
*	*	*
*	*	*
n - 1	*fin n-2*	$A(1+i)^{-(n-1)}$
n	*fin n-1*	$A(1+i)^{-n}$
		TOTAL = V_0 = *valeur actuelle*

Par exemple, si 5 versements sont prévus,:



Alors:

$$V_0 = A(1+i)^{1} + A(1+i)^{2} + A(1+i)^{3} + \ldots + A(1+i)^{(n\ \ 1)} + A(1+i)^{n}$$

$$\Leftrightarrow V_0 = A[(1+i)^{1} + (1+i)^{2} + (1+i)^{3} + \ldots + (1+i)^{n}]$$

$$\Leftrightarrow V_0 = A[(1+i)^{n} + (1+i)^{(n-1)} + (1+i)^{(n-2)} + \ldots + (1+i)^{1}]$$

Or le contenu des crochets correspond à la somme des n termes d'une suite géométrique de raison égale à "1+i" et de premier terme égal à "$(1+i)^{n}$".

En effet, par commodité dans les calculs, il est préférable d'avoir une raison simple (1 + i), au lieu de 1/(1 + i), ce qui peut se résoudre ici en prenant le terme $(1+i)^{n}$ comme premier terme au lieu de prendre $(1+i)^{1}$, et en changeant l'ordre des termes de la suite.

Alors:

$$V_0 = A \times (1+i)^{n} \times \frac{1-(1+i)^{n}}{1-(1+i)}$$

$$\boxed{S_n = a1 \times \frac{1-q^{n}}{1-q}}$$

$$\Leftrightarrow V_0 = A \times \frac{(1+i)^{n} \times 1 - (1+i)^{n} \times (1+i)^{n}}{1-(1+i)}$$

$$\Leftrightarrow V_0 = A \times \frac{(1+i)^{-n} - 1}{-i} = A \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

La valeur actuelle V_0 d'une suite de n versements constants de valeur A au taux i d'intérêts composés pris comme taux d'actualisation suit la formule fondamentale:

$$V_0 = A \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Il peut être intéressant de rapprocher la valeur actuelle au temps t = 0 d'une suite d'annuités constantes, et la valeur acquise par cette même suite au temps t = n quand les annuités sont placées au taux i :

$$\frac{(1+i)^{n} - 1}{i}$$

$$V_n = A \times \underline{\qquad\qquad}$$

Si on multiplie V0 par $(1 + i)^n$ au numérateur et au dénominateur, on obtient,

$$V_0 = A \times \frac{(1+i)^n}{(1+i)^n} \times \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} = \frac{1}{(1+i)^n} \times A \times \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

d'où l'on conclut que,

$$V_0 = \frac{1}{(1+i)^n} \times V_n = V_n \times (1+i)^{-n}$$

$$\text{et} \quad V_n = V_0 \times (1+i)^n$$

deux résultats prévisibles.

20.1 Exemple : calcul de valeur actuelle

Soit 15 annuités constantes de 10000 € chacune pour un taux d'actualisation de 8%. Calculez la valeur actuelle totale.

Réponse:

$$(1{,}08)^{-15} = 0{,}315242$$

$$V_0 = A \times \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} = 10000 \times \frac{1 - (1{,}08)^{-15}}{0{,}08}$$

Soit, $V_0 = 85594{,}79$ *€*

21 Annuités versées en "début" de période

21.1 Que devient la valeur acquise?

Les calculs précédents ont été effectués avec n versements en fin de période tous égaux à A. Que se passerait-il si les n versements étaient versés en début de période et que l'on calcule encore à la date "n" la valeur acquise totale?

Chaque versement capitaliserait alors une période de plus. Les valeurs acquises se calculeraient non pas à partir du versement début de période, mais à partir du versement capitalisé sur une période, c'est-à-dire multiplié par "1+i". Il suffit donc de multiplier l'expression

$$A \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

par "1+i"

On obtient facilement la formule de la valeur acquise d'une suite de n versements constants de valeur A effectués en début de période et calculée à la fin des n périodes:

$$Vn = A(1+i) \times \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

On peut retrouver cette formule en partant du même tableau que dans la section 19,

Rang de l'an^{té}	*Date du verst*	*Durée de capi*^{ion}	*Valeurs acquises par les an*^{tés}
1	1	*n périodes*	$A(1+i)^n$
2	2	*n -1 périodes*	$A(1+i)^{n\ 1}$
3	3	*n -2 périodes*	$A(1+i)^{n\ 2}$
*	*	*	*
*	*	*	*
*	*	*	*
n - 1	*n* - 1	2 *périodes*	$A(1+i)^2$
n	*n*	1 *période*	$A(1+i)$

Par exemple, cinq versements début de période, commençant le 1er janvier 2011. Le retrait de la somme acquise se fera le 31 décembre 2015.

01/01/11	01/01/12	01/01/13	01/01/14	01/01/15	31/12/15
X	X	X	X	X	X
1er verst	2ème verst	3ème verst	4ème verst	5ème verst	val. acquise

Le premier versement fera bien l'objet de cinq capitalisations.

Reprenons le tableau ci-dessus. On obtient la valeur acquise totale V_n par la somme de toutes les valeurs acquises par les annuités successives:

$V_n = A(1 + i)^n + A(1 + i)^{n \; 1} + A(1 + i)^{n \; 2} + ... + A(1 + i)^2 + A(1 + i)$

$\Leftrightarrow V_n = A(1 + i) + A(1 + i)^1 + A(1 + i)^2 + ... + A(1 + i)^{n \; 2} + A(1 + i)^{n \; 1} + A(1 + i)^n$

La dernière expression correspond à la somme des n termes d'une suite géométrique de raison égale à (1 + i), et de premier terme égal à A(1 + i), de sorte que,

$$V_n = A \times (1 + i) \times \frac{(1 + i)^n \quad 1}{(1 + i) \quad 1}$$

Rappel $\quad Sn = a \dfrac{1 \quad q^n}{1 - q}$ $\quad$ avec q différent de 1

$$\text{soit} \quad V_n = A \times (1 + i) \times \frac{(1 + i)^n \quad 1}{i}$$

21.2 Que devient la valeur actuelle?

Si les annuités sont versées au début de chaque période, elles travaillent toutes une période de plus que si elles étaient versées en fin de période. Il faut toutes les actualiser avec une capitalisation périodique de plus. Pour cela, il suffit de multiplier par "1+i" la valeur actuelle totale.

On obtient facilement la valeur actuelle à la date "origine" d'une suite de n versements constants, égaux chacun à A , versés en début de période:

$$V_0 = A \times (1 + i) \times \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}$$

On peut reprendre le même type de démonstration que précédemment

$V_0 = A + A(1 + i)^{\; 1} + A(1 + i)^{\; 2} + A(1 + i)^{\; 3} + ... + A(1 + i)^{(n \; 1)}$

$\Leftrightarrow V_0 = A(1 + i)^{(n-1)} + A(1 + i)^{(n-2)} + \ldots + A(1 + i)^{\; 2} + A(1 + i)^{\; 1} + A$

La ligne du temps donnerait pour cinq versements,

01/01/11	01/01/12	01/01/13	01/01/14	01/01/15	31/12/15
X	X	X	X	X	X
A	$A(1 + i)^{\; 1}$	$A(1 + i)^{\; 2}$	$A(1 + i)^{\; 3}$	$A(1 + i)^{\; 4}$	

Le polynome V_0 correspond à la somme des n termes d'une suite géométrique de raison égale à "1+i" et de premier terme égal à "$A(1 + i)^{(n-1)}$,

alors:

$$V_0 = A(1 + i)^{(n-1)} \times \frac{1 - (1 + i)^{\; n}}{1 - (1 + i)}$$

On peut multiplier l'expression de droite par $\dfrac{(1 + i)}{(1 + i)}$

On voit que $A(1 + i)^{(n-1)}$ divisé par $(1 + i)$ donne $A(1 + i)^{\; n}$ ce qui permet d'écrire,

$$V_0 = A \times (1 + i) \times (1 + i)^{\; n} \times \frac{1 - (1 + i)^{\; n}}{1 - (1 + i)}$$

$$\text{soit} \quad V_0 = A \times (1 + i) \times \frac{(1 + i)^{\; n} \times 1 - (1 + i)^{\; n} \times (1 + i)^{\; n}}{1 - (1 + i)}$$

$$\frac{(1 + i)^{-n} - 1}{-i} \qquad\qquad \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}$$

$\Leftrightarrow \quad V_0 = A \times (1+i) \times \overline{}$ ou $V_0 = A \times (1+i) \times \overline{}$

On peut également rapprocher la valeur actuelle au temps t = 0 d'une suite d'annuités constantes début de période, et la valeur acquise par cette même suite au temps t = n quand les annuités sont placées au taux i, qui est égale à,

$$V_n = A \times (1+i) \times \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Si on multiplie V0 par $(1+i)^n$ au numérateur et au dénominateur, on obtient,

$$V_0 = A \times (1+i) \frac{(1+i)^n}{(1+i)^n} \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{1}{(1+i)^n} \times A(1+i) \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

d'où l'on conclut que,

$$V_0 = \frac{1}{(1+i)^n} \times V_n = V_n \times (1+i)^{-n}$$

$$\text{et } V_n = V_0 \times (1+i)^n$$

donc sans changement par rapport au modèle avec annuités versées en fin de période.

Partie VII
Rentabilité d'un investissement

23 Méthode de la VAN

23.1 Principe

Une entreprise envisage par exemple un investissement dont le coût C est connu. Cette dépense, si elle décide de la faire, doit être réglée immédiatement (donc à la date "0"). L'investissement sera, par exemple, l'achat d'un complexe de machines et d'installations, qui en étant exploitées, génèreront une production sur plusieurs années, avec des recettes produites par la vente des biens fabriqués, et des dépenses nécessitées par l'exploitation.

L'entreprise doit mettre en balance la dépense engagée à la date "0" avec les recettes et dépenses à venir, qui font suite à l'investissement (donc à des dates ultérieures ...). Le surplus des recettes sur les dépenses constitue ce qu'on appelle le **cash-flow** de la période, ou flux de trésorerie net (FTN).

Pour comparer versements faits et versements reçus pendant la durée de vie des équipements acquis, il faut le faire par rapport à une même date de référence. Comme c'est à la date "0" que l'investissement va être réalisé, il faut effectuer les calculs à cette date "0". Il faut donc actualiser toutes les sommes futures à la date "0".

23.2 Définition de la VAN

On appelle valeur actuelle nette, ou VAN, la valeur exprimée à la date 0 de l'ensemble des opérations, ou plutôt transactions, attachées à l'investissement que l'on veut réaliser, ou en d'autre terme la **somme algébrique de la dépense initiale d'investissement et des flux de recettes et de dépenses actualisées** correspondantes. Par convention, les **sorties d'argent sont affectées d'un signe négatif** et les **rentrées** d'un **signe positif**.

23.3 Décision selon le critère de la Van

* si VAN > 0 alors l'investissement est rentable et peut être envisagé

* si VAN $= 0$ alors il n'y a pas plus de raisons d'accepter que de refuser l'investissement
* si VAN < 0 alors l'investissement n'est pas rentable et doit être écarté

23.4 Formule de la VAN:

Par convention, on comptabilisera, en les totalisant, les dépenses et recettes liées à l'exploitation de l'investissement en fin d'année, ce qui donnera, l'acquisition des équipements étant supposée faite dès la période initiale,

$$\text{VAN} = -I_0 + \frac{R_1 - D_1}{(1+a)^1} + \frac{R_2 - D_2}{(1+a)^2} + \ldots + \frac{R_n - D_n}{(1+a)^n}$$

$$\text{VAN} = I_0 + \sum_{t=1}^{t=n} \frac{R_t - D_t}{(1+}$$

dans laquelle :

I_0 = somme investie à la date "0", *le premier flux négatif à considérer*

Rt Dt = recettes dépenses = Bt , bénéfice "algébrique" ou flux de trésorerie nets/cash-flows pour l'année "t"

a = taux d'actualisation annuel

n = nombre d'années

les cash-flows sont des flux nets a priori positifs, l'entreprise encaissant normalement plus de recettes qu'elle ne fait de dépenses.

23.5 Exemple 1

Une entreprise envisage un investissement de 1200000 € à la date "0". La dépense est à régler immédiatement.

Grâce à cette dépense, l'entreprise acquiert des moyens de production dont la durée de vie est estimée à 7 années.

Cela devrait lui permettre d'obtenir des cash-flows annuels évalués pour les 7 années à venir, respectivement à

B1 = 250000 ; B2 = 300000 ; B3 = 350000 ; B4 = 300000 ; B5 = 250000 ; B6 = 150000; B7 = 100000.

B1 étant le premier cash-flow réalisé un an après l'acquisition des moyens de production. Si, par exemple, l'acquisition des moyens de production s'est effectuée le 1er janvier 2011, le premier cash-flow sera comptabilisé le 31 décembre 2011.

Supposons que le taux d'actualisation soit égal à 12% à l'époque de l'investissement.

soit : $a = 0,12$; $n = 7$ années. On peut calculer directement la VAN de cet investissement,

$$\text{VAN} = I_0 + \sum_{t=1}^{t=n} \frac{B_t}{(1+a)^t}$$

$$\text{VAN} = 1200000 + 250000 \times 1,12^{1} + 300000 \times 1,12^{2} + 350000 \times 1,12^{3} + 300000 \times 1,12^{4} + 250000 \times 1,12^{5} + 150000 \times 1,12^{6} + 100000 \times 1,12^{7}$$

Soit, V AN = 34762, 74 €

Décision : il faut écarter cet investissement, dans la mesure où la VAN, qui lui correspond, est négative (et même "fortement" négative...) ; De manière triviale, on pourra dire qu'il coûte plus cher qu'il ne rapporte.

On voit ainsi qu'il y a deux niveaux dans la calcul économique portant sur les investissements. **Premier niveau**, les cash-flows doivent être positifs ou principalement positifs, sinon, bien sûr,

il est inutile d'aller plus loin. **Deuxième niveau**, une suite de cash-flows positives est une condition nécessaire, mais non suffisantes, il faut que leur somme actualisée soit supérieure aux dépenses directes engendrées par l'investissement.

25 Méthode du TRI, ou taux de rendement interne

25.1 Principe et définition

On appelle "taux de rendement interne" ou TRI d'un investissement le taux r pour lequel la VAN s'annule. La méthode du TRI consiste à comparer ce taux à un **taux d'actualisation de référence**. Le TRI sera symbolisé par la lettre "r".

La valeur du taux d'actualisation de référence est en correspondance avec la valeur du taux du marché "au moment" où les calculs sont effectués pour la prise de décision. On a, en effet, le choix, au moins en théorie, d'investir son argent dans l'acquisition d'équipements productifs supplémentaires - le gestionnaire ajouterait l'augmentation induite du BFR (Besoin en fonds de roulement) – et celui d'investir la même somme sur le marché financier. Si l'on peut obtenir un rendement égal ou même supérieur sur le marché financier, il n'y a pas à hésiter.

C'est avec cette idée que l'on calcule le taux de rendement que l'on espère obtenir d'un investissement industriel. La comparaison du taux de rendement interne et d'un taux de référence est le principe de base, qui justifie cette méthode de choix des investissements.

La difficulté porte sur le taux financier que l'on va prendre comme taux d'actualisation de référence, afin de le comparer au TRI que l'on aura calculé.

Le taux le plus immédiat est celui des emprunts publics d'une durée équivalente à celle attendue de l'investissement. Les emprunts publics sont, ou plutôt étaient, considérés comme pratiquement des **emprunts sans risques**. Mais sur les marchés financiers, on trouve des possibilités de placements offrant des rendements plus intéressants, mais évidemment plus risqués.
En fait, pour les autres emprunteurs que l'Etat, les investisseurs ajoutent aux taux de base, celui des emprunts publics, un supplément correspondant à une sorte de prime de risque, variable selon la qualité de l'emprunteur.

L'entreprise, elle, pour sélectionner ses investissements va choisir un taux de référence qui tiendra compte à la fois des taux que l'entreprise subit elle–même de ses prêteurs, première composante, et des exigences de rendement avancées par ses actionnaires, la deuxième composante.
Les exigences des actionnaires tiennent compte du risque que représente pour eux l'entreprise, on parle d'une prime de risque, sous forme d'un pourcentage qui s'ajoute au taux des emprunts sans risque ; s'y ajoute une rémunération supplémentaire liée au rapport de force qu'ils ont su établir avec la Direction de l'entreprise dans laquelle ils ont placé leurs capitaux, et au niveau général de rémunération en usage sur le marché. L'ensemble constitue le taux requis par les actionnaires ou coût des capitaux propres.
Si le taux de rendement général des fonds placés par les actionnaires s'éloigne trop du taux qu'ils pourraient obtenir en général sur le marché des actions, ceux-ci deviennent plus sensibles aux offres de rachat, prenant la forme, par exemple, d'une OPA.

Pour revenir au taux de référence, auquel on comparera le TRI, celui-ci fait la synthèse de ces deux taux ; on calcule pour cela le taux moyen pondéré du taux d'intérêt sur emprunt que paie l'entreprise à ses créanciers, et du taux requis par les actionnaires, la pondération reprenant le partage du passif entre fonds propres et endettement financier.

$$CMP = \rho \times \frac{CP}{CP + D} + i_f \times \frac{CP}{CP + D}$$

ρ : coût des capitaux propres
i_f : taux appliqué par les créanciers financiers de l'entreprise
CP : capitaux propres

D : endettement financier

Ce taux ainsi calculé constitue ce que l'on appelle dans la théorie financière le coût du capital.

Nous n'insisterons pas trop là-dessus ; ce que l'on retiendra, c'est que le financement par actions n'est pas, contrairement à ce qu'on pourrait penser, un financement gratuit.

Une fois le taux d'actualisation de référence CMP fixé, appelons-le i pour simplifier, on le confrontera au TRI de l'investissement, avec comme règle de décision,
* si TRI > i alors l'investissement est rentable et peut être envisagé ;
* si TRI = i alors l'investissement peut être envisagé, sachant que l'incertitude, qui forcément entoure le calcul des cash-flows futurs, peut conduire à rejeter l'investissement ;
* si TRI < i alors on doit rejeter l'investissement.

En pratique, l'investissement s'inscrit dans un processus stratégique plus global, ce qui peut amener l'entreprise à accepter un certain nombre d'investissements peu rentables. Cette question des investissements nécessaires, mais non rentables dépasse bien sûr le cadre de ce cours.

25.2 Méthode de calcul du TRI

La méthode consiste à rechercher deux valeurs r1et r2 du taux i recherché pour lesquelles la VAN prend respectivement les valeurs VAN1 et VAN2 proches de 0, et qui encadrent 0.

On procède ensuite par **interpolation linéaire** à partir du tableau suivant,

$$\begin{bmatrix} r_1 & TRI & r_2 \\ VAN_1 & 0 & VAN_2 \end{bmatrix}$$

La VAN, nous l'avons, vu dépend du taux d'actualisation choisi ; plus celui-ci augmente et plus la valeur de la VAN diminue, et inversement. La VAN est donc fonction du taux d'actualisation pris comme variable,

$$VAN = VAN(i)$$

et, visiblement, il s'agit d'une fonction décroissante.

Ce que l'on recherche, c'est la valeur de la variable i telle que la fonction VAN(i) soit nulle. Nous avons déjà vu ce type de problème, il nous conduit, chaque fois que la fonction n'a pas une forme simple, à faire une hypothèse de linéarité de la fonction.

L'interpolation linéaire permet d'écrire,

$$\frac{TRI - r_1}{r_2 - r_1} = \frac{0 - VAN_1}{VAN_2 - VAN_1}$$

ou encore:

$$TRI = r1 + (r2 \quad r1) \times \frac{-VAN_1}{VAN_2 - VAN_1}$$

25.3 Décision selon le critère du TRI - Rappel

a) un investissement est envisageable si son TRI est supérieur au taux d'actualisation de référence. Plus il dépasse le taux du marché et plus l'investissement est rentable.

b) entre plusieurs projets de TRI supérieur au taux d'actualisation de référence, le projet à choisir est en principe celui dont le TRI est le plus grand.

25.4 Exemple de calcul du TRI

L'investissement envisagé s'élève à la date "0" à 1 200 000 euros.

Cette dépense est à régler immédiatement.

Grâce à cette dépense, l'entreprise développe ses moyens de production dont la durée de vie semble devoir être de 7 années. Cela devrait lui permettre d'obtenir des cash-flows annuels estimés pour les 7 années à venir respectivement à

B1= 250000 ; B2= 300000 ; B3= 350000 ; B4= 300000 ; B5= 250000 ; B6= 150000 ; B7 = 100000

<u>Question</u>
Quel est le taux de rendement interne de l'investissement ?

Réponse :

La première étape est d'encadrer de manière étroite le TRI en trouvant une valeur de i, taux d'actualisation, telle que la VAN soit très petite par rapport au capital engagé et négative, et une deuxième valeur de i, telle que la VAN soit là encore relativement petite, mais positive. Ces deux valeurs de i, r_1 et r_2, constitueront l'encadrement de la valeur de i égale au TRI recherché.

Essayons un taux d'actualisation égal à 11,5% à l'époque de l'investissement...

Alors:

I_0 = 1 200 000 euros ; $a_1 = 0{,}115$; n = 7 années

d'où:

$$VAN_1 = \quad 1200000 + 250000 \times 1{,}115^{\;1} + 300000 \times 1{,}115^{-2} + 350000 \times 1{,}115^{\;3} + 300000 \times 1{,}115^{\;4} + 250000 \times 1{,}115^{\;5} + 150000 \times 1{,}115^{\;6} + 100000 \times 1{,}115^{\;7}$$

$\Leftrightarrow$ V AN = 18086,43 euros

La VAN pour 11,5% est différente de 0, mais elle est quand même très petite en ordre de grandeur, si l'on fait la comparaison avec l'ordre de grandeur de la dépense d'investissement, 18 086 et 1 200 000. On peut donc retenir ce taux comme premier élément d'encadrement de la valeur recherchée du TRI. Ce sera l'élément r_1

On remarque cependant que pour 11,5%, la VAN est négative. Nous avons déjà noté que la VAN est calculée en actualisant pour l'essentiel les valeurs positives ; conséquence, plus le taux choisi est élevé et plus faible sera la VAN.
On en conclut donc que le taux de 11,5% est trop fort ; pour trouver l'autre valeur, r_2, permettant d'encadrer le TRI recherché, on doit "essayer" un taux plus faible, pas trop différent de r_1 cependant.

Essayons par exemple 10,5%

$$VAN_2 = \quad 1200000 + 250000 \times 1{,}105^{\;1} + 300000 \times 1{,}105^{-2} + 350000 \times 1{,}105^{\;3} + 300000 \times 1{,}105^{\;4} + 250000 \times 1{,}105^{\;5} + 150000 \times 1{,}105^{\;6} + 100000 \times 1{,}105^{\;7}$$

$\Leftrightarrow$ V AN = +16427,20 euros

En ordre de grandeur, comparé à un investissement de l'ordre du million, on reste dans des valeurs très petites. Admettons que, de ce fait, l'encadrement nous convienne... Dans le cas contraire, il faudrait utiliser des taux plus proches afin d'obtenir un encadrement plus étroit de 0, pour la valeur de la VAN correspondant au TRI.

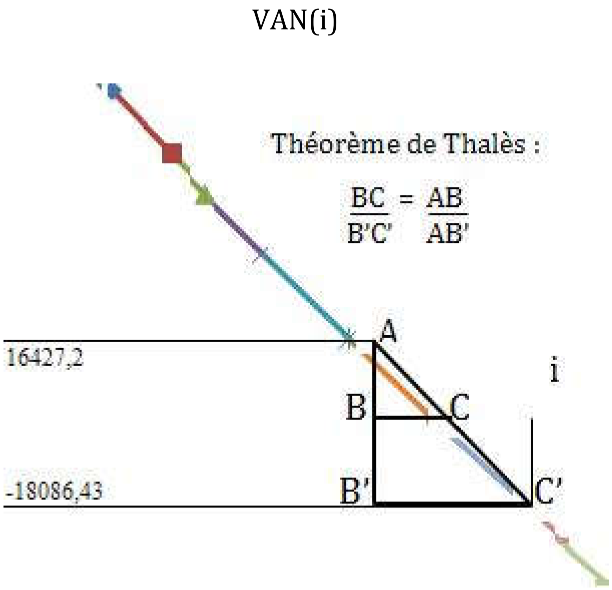
Si r_1 = 11, 50% alors VAN_1 = 18086, 43 euros
Si r_2 = 10, 50% alors VAN_2 = +16427, 20 euros

Procédons par **interpolation linéaire, ce qui constituera la deuxième étape** :

0,115	i = TRI	0,105
18086,43	0	+16427, 20

d'où

$$\frac{TRI\ -\ 0{,}105}{0{,}115\ -\ 0{,}105} = \frac{0\ -\ 16427{,}\ 20}{18086{,}43 - 16427{,}\ 20}$$



$\Leftrightarrow$ TRI = 0,105 + 0,010 x $\dfrac{16427,20}{34513,63}$ = 0,109759 soit 10,98%

Le calcul fait sous un logiciel tableur – les tableurs ont plusieurs fonctions financières, dont celles de la VAN et du TRI – donne un TRI égal à 10,97% ! On remarque que, de fait, la courbure de la courbe VAN = Van(r) est très faible, ce qui justifie l'approximation à la base de l'interpolation linéaire.

Partie VIII
Amortissement des emprunts

26 Amortissement des emprunts indivis

Un emprunt indivis est un emprunt contracté auprès d'un seul prêteur. En général, cet emprunt court sur plusieurs périodes, par exemple, plusieurs années. Cet emprunt doit bien sûr être remboursé, on parle d'amortissement de l'emprunt. Les modalités de remboursement sont variables, mais à la fin, la totalité de l'emprunt doit être remboursée.

Considérons un prêt aux conditions suivantes :

somme prêtée = C , le capital prêté à l'emprunteur

dette = D_0 , la dette à la date 0 de l'emprunteur

Soit, $C = D_0$

durée de l'emprunt = n années

taux d'intérêt i pour 1 euro et pour un an

L'emprunteur peut rembourser de plusieurs manières cet emprunt :

- soit il rembourse en une seule fois à la fin des n années écoulées.
- soit progressivement par n annuités successives a_1, a_2, ..., a_n.

Les annuités ne sont pas nécessairement annuelles, elles sont souvent mensuelles.

27 Amortissement progressif d'un emprunt

27.1 Principe

Il s'agit ici de remboursements échelonnés pendant toute la durée de l'emprunt. A la fin de la première période d'emprunt (l'année, par exemple) l'emprunteur verse au prêteur une somme égale à l'intérêt Ci de la 1-ière période, augmentée d'un premier amortissement m_1 (remboursement) de la dette.

La 1-ière annuité A_1 est donc égale à :

$$A_1 = iC + m_1$$

elle est supérieure à l'intérêt de la première année, dans la mesure où l'on commence à rembourser une partie de la dette.

Après le versement de A_1, la dette résiduelle D_1 est égale à la différence entre la dette de départ C (ou encore D_0) ET le premier amortissement m_1, soit :

$$A_1 = iC + m_1 \Rightarrow D_1 = C - m_1 = D_0 - m_1$$

A la fin de la 2-ième période, il faut payer les intérêts sur D_1 **augmentés** du 2-ième amortissement m_2, d'où le montant de la 2-ième annuité :

$$A_2 = iD_1 + m_2$$

Après le versement de a_2, la dette résiduelle D_2 est égale à la différence entre la dette résiduelle précédente D_1 ET le 2-ième amortissement m_2, soit :

$$A_2 = iD_1 + m_2 \iff D_2 = D_1 - m_2$$

A la fin de la 3-ième période, il faut payer les intérêts sur D_2 **augmentés** du 3-ième amortissement m_3, d'où le montant de la 3-ième annuité :

$$A_3 = iD_2 + m_3$$

Ainsi de suite jusqu'à la fin de la j-ième année :

$$A_j = iD_{j-1} + m_j \quad \text{et} \quad D_j = D_{j-1} - m_j \quad \text{pour tout j de 1, 2, 3,…, n}$$

Cependant, à la fin de la dernière année, l'emprunteur verse l'annuité a_n telle que :

$$A_n = iD_{n\ 1} + m_n$$

MAIS ce dernier amortissement m_n éteint la dette résiduelle précédente, d'où :

$$D_n = D_{n-1} - m_n = 0 \quad \text{et} \quad m_n = D_{n-1}$$

28 Amortissement par annuités constantes d'un emprunt

L'amortissement au moyen d'annuités constantes permet à l'emprunteur de débourser la même somme d'une échéance à l'autre.

Il s'agit toujours d'un remboursement progressif, mais avec des annuités toutes égales à "A".

Il faut bien comprendre, chaque annuité A comprend :

- **une part paiement de l'intérêt sur le capital restant dû en début de période**
- **une part remboursement ou amortissement partiel de l'emprunt**

Au fur et à mesure que les annuités se succèdent, le capital restant dû diminue ; comme l'intérêt est calculé sur le capital restant dû, son montant diminue aussi, et comme les annuités successives sont toutes égales, la part remboursement partiel augmente d'autant.
Les dernières annuités, de ce fait, comprennent une faible part d'intérêt et une grande part d'amortissement. C'est l'inverse pour les premières annuités.

La principale difficulté sera de calculer le montant de l'annuité constante.

On démontre, nous ne le ferons pas, que la **somme des valeurs actuelles des annuités A** est égale au capital prêté, ou dette initiale de l'emprunteur,

$$C = A(1+i)^{1} + A(1+i)^{2} + A(1+i)^{3} + ... + A(1+i)^{(n\ 1)} + A(1+i)^{n}$$

On retrouve le contexte de la valeur actuelle d'une somme d'annuités constantes fin de période. On a déjà établi la valeur de cette somme, ce qui donne ici :

$$C = A \times \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

On déduit de cette formule la formule pratique de calcul de l'annuité, une fois que le capital emprunté, le taux, et le nombre d'annuités sont connus et acceptés par l'emprunteur...

$$A = \frac{iC}{1 - (1+i)^{-n}}$$

28.2 Exemple de mise en pratique de ces principes de calcul

Monsieur et Madame Fuchs décident d'effectuer des travaux de rénovation dans leur appartement, dont le coût total est de 48 000 €. Ils financent ces travaux sur leur argent personnel à hauteur de 12 000 €, et obtiennent un prêt de leur banque pour le reste.

Le prêt est consenti le 1er mai 2011 pour trois ans au taux annuel effectif de 6,09%. L'amortissement du prêt se fait par semestrialités constantes (comprendre amortissement chaque semestre) – Méthode de l'amortissement par annuités constantes, annuités qui ici sont traduites en "semestrialités".

1) Construire le tableau d'amortissement de l'emprunt effectué par Monsieur et Madame Fuchs.

2) Quelle somme totale auront-t-ils versé au terme des 3 ans ?

3) Quel est le supplément de coût par rapport à un financement qui se ferait uniquement sur argent personnel ? Auront-ils "perdu" en empruntant, au lieu de payer immédiatement l'ensemble de la dépense sur leur argent personnel ?

Réponse

1) Le prêt se monte à (48000 – 12000 =) 36 000 €. Les remboursements se font par semestre, il y en a six sur une période de trois ans.
Le taux de 6,09% est annuel, il faut le ramener à un taux semestriel,

$$(1+i) = (1 + 6{,}09\%)^{1/2} = 1{,}03,, \text{ soit } i = 3\%$$

Pour construire le tableau d'amortissement de l'emprunt, on doit calculer d'abord le montant de l'annuité (semestrialité) constante :

$$A = \frac{iC}{1 - (1+i)^{-n}}$$

$$A = \frac{0{,}03 \times 36000}{1 - (1{,}03)^{-6}} = 6645{,}51 \text{ €}$$

Périodes	Dette début période	Intérêts	Amortissements	Annuités
1	36000,00	1080,00	5565,51	6645,51
2	30434,49	913,03	5732,48	6645,51
3	24702,01	741,06	5904,45	6645,51
4	18797,57	563,93	6081,58	6645,51
5	12715,98	381,48	6264,03	6645,51
6	6451,95	193,56	6451,95	6645,51

2) La somme totale versée est le total de la colonne " annuités " soit

$$6645{,}51 \times 6 \;=\; \mathbf{39873,\ 06\ €}$$

3) L'emprunt est la cause d'un supplément de sortie d'argent de,

$$39873{,}06 \;-\; 36000 \;=\; \mathbf{3873{,}06\ €}$$

Ce qui ne veut pas dire que l'emprunt soit plus coûteux que le paiement intégral sur fonds personnels. On doit, en effet, ramener tous les termes de la comparaison à la période actuelle, qui, dans le cas présent sera le 1er mai 2011.
On comparera donc les valeurs actuelles des six annuités de 6645,51 €, qui correspondent à des sorties d'argent effectives, et la somme de 36 000 € que Monsieur et Madame Fuchs auraient pu verser immédiatement.

Commençons par les annuités ; la première annuité sera versée le 1er mai 2012, donc un an après la date de référence ; sa valeur actuelle sera donc de 6645,51 / 1,03 = 6451,95 , en prenant les 3% semestriels comme taux d'actualisation. Le tableau suivant donne l'ensemble des six annuités actualisées,

1er mai 12	6 645,51	6 451,95
1er mai 13	6 645,51	6 264,03
1er mai 14	6 645,51	6 081,58
2e mai 15	6 645,51	5 904,45
3e mai 16	6 645,51	5 732,48
4e mai 17	6 645,51	5 565,51
		36 000

Soit un total de 36 000 € en valeur actualisée, à comparer aux 36 000 €, que le couple aurait pu verser immédiatement. En supposant que le couple puisse placer au même taux semestriel de 3%, le coût effectif de l'emprunt est nul.

29 L'emprunt obligataire

La grande différence avec l'emprunt indivis tient au fait que l'emprunt obligataire est placé auprès d'un grand nombre de prêteurs, dits obligataires. La somme empruntée, ou capital emprunté, est divisée en obligations.
La valeur d'une obligation, C, est égale au capital emprunté, K, divisé par le nombre d'obligations émises, N.

$$C \;=\; K / N$$

C est la valeur nominale, ou pair de l'obligation. En pratique, pour attirer les investisseurs, l'émetteur, qui est a priori une très grande entreprise, une banque, voire un Etat ou une grande région habilitée à emprunter, peut faire payer les obligations à un prix inférieur au pair ; la différence, dans ce cas, s'appelle la prime d'émission.

Il peut également les attirer en leur offrant un prix de remboursement supérieur au nominal ; dans ce cas, la différence prix de remboursement moins nominal de l'obligation constitue la prime de remboursement.

L'intérêt sera calculé dans tous les cas en multipliant **le nominal de l'obligation** par un taux fixe. Il existe aussi des taux variables, mais nous n'en tiendrons pas compte.

Noter que, même en l'absence de primes d'émission, l'entité émettrice ne touchera pas le total de la somme empruntée, à cause des frais liés à l'émission, correspondant pour l'essentiel aux commissions perçues par les banques, qui en assurent le placement. Là encore, nous ferons abstraction de cette contrainte.

Les modalités de remboursement des obligations sont très proches de celles des emprunts indivis,

- remboursement in fine, la totalité est remboursée à la fin de l'emprunt ; il n'y a pas de ce point de vue de différence par rapport à l'emprunt indivis ;
- remboursement par fractions égales ; chaque année, on rembourse le même nombre d'obligations
- amortissement par annuités constantes

Dans les deux derniers cas, il faut procéder à un tirage au sort des obligations remboursées. Nous nous contenterons ici d'envisager le seul remboursement par annuités constantes.

29.1 Remboursement des obligations par annuités constantes

On suppose que le remboursement se fait au pair, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de prime de remboursement. La formule générale, qui donne le montant de l'annuité constante est,

$$A = \frac{iK}{1 - (1+i)^{-n}}$$

K étant le capital total emprunté, total ici des obligations émises.

La fraction du capital remboursé la première année est,

$$k_1 = A - K \times i$$

Le nombre d'obligations remboursées, le nominal de chacune d'entre elles étant de C, sera,

$$n_1 = k1/C$$

N étant le nombre initial d'obligations.

Quand on arrive à la p-ième échéance, le capital remboursé sera,

$$k_p = A - K_{p-1} \times i$$

ou encore,

$$k_p = k_{p-1} \times (1+i)$$

 # Démonstration

Kp représente le capital restant dû fin de l'année p. Comme les annuités sont égales, il vient,

$$K_{p-1} \times i + k_p = K_p \times i + k_{p+1}$$

$$\Leftrightarrow \qquad k_{p+1} = k_p + (K_{p-1} - K_p) \times i$$

La différence entre le capital dû fin p-1 et le capital restant dû fin de l'année p est en fait la fraction remboursée l'année p, soit

$$K_{p-1} - K_p = k_p$$

de là,

$$k_{p+1} = k_p \times (1+i)$$

et, ce qui revient au même,

$$k_p = k_{p-1} \times (1 + i)$$

Le nombre d'obligations remboursées l'année p sera,

$$n_p = k_p / C$$

Ces formules sont cependant théoriques, dans la mesure où le nombre d'obligations remboursées chaque année doit être entier. Il sera donc nécessaire d'opérer des ajustements en vue d'arrondir le nombre obtenu par calcul, ce qui entraînera des biais dans le tableau d'amortissement.

29.2 Application - remboursement d'un emprunt obligataire

Une banque émet pour cinq ans un emprunt obligataire, sans prime d'émission, de 40 000 000 € divisé en 200 000 obligations, remboursées au pair. Le taux d'intérêt est de 7,2%. Les échéances sont annuelles.

Construire le tableau d'amortissement de l'emprunt.

Réponse

On calcule d'abord l'annuité constante,

$$A = \frac{i\,K}{1 - (1+i)^{-n}}$$

K étant le capital total emprunté, total ici des obligations émises.

$$A = \frac{7{,}2\% \times 40\,000\,000}{1 - 1{,}072^{-5}} = 9\,807\,926{,}73 \text{ €}$$

périodes	capital restant dû	intérêts	amortissement théorique	nombre d'obligations	amortissement réel	annuités théorique	annuités réelles
1	40 000 000	2 880 000,00	6 927 926,73	34 640	6 928 000	9 807 926,73	9 808 000,00
2	33 072 000	2 381 184,00	7 426 742,73	37 134	7 426 800	9 807 926,73	9 807 984,00
3	25 645 200	1 846 454,40	7 961 472,33	39 807	7 961 400	9 807 926,73	9 807 854,40
4	17 683 800	1 273 233,60	8 534 693,13	42 673	8 534 600	9 807 926,73	9 807 833,60
5	9 149 200	658 742,40	9 149 184,33	45 746	9 149 200	9 807 926,73	9 807 942,40

Explications :

L'amortissement, pour une annuité de 9 807 926,73 € est de (9 807 926,73 – 2 880 000 =) 6 927 926,73 €. Divisé par 200, le nominal d'une obligation, cela donne 34 639,63 obligations à rembourser, **un nombre que l'on est obligé d'arrondir à 34 640**.

De ce fait, l'amortissement en fin de première période sera de 34 640 x 200 = 6 928 000 €, et le capital restant dû début de la période suivante de 40 000 000 - 6 928 000 = 33 072 000 €. Ce montant servira de base pour le calcul de l'intérêt à la fin de la période 2.